目录

第 4 章 一阶逻辑

命题逻辑仅能对原子命题进行布尔化推理，难以刻画命题内部的对象、性质与关系，其表达与推理能力存在明显局限。一阶逻辑在保留命题逻辑核心推理结构的基础上，通过引入个体变元、谓词和量词等工具，实现了对命题内部结构的精细分析，能够形式化描述个体之间的复杂关联，是对命题逻辑的扩展与强化。一阶逻辑以更强大的表达能力与更严谨的理论基础，成为经典逻辑的核心系统，是形式化方法与计算科学的重要工具。

4.1 一阶逻辑的基本概念

4.1.1 命题逻辑的局限性

命题是可判断真假的陈述语句，其内部通常包含对象、属性、数量范围、逻辑连接词等要素。命题逻辑专注于命题之间的逻辑关系与真值组合，无法满足更复杂的形式化描述与推理需求。其局限性具体表现如下：

1) 不分析命题内部结构，无法刻画对象与属性的关联

命题逻辑将每一个原子命题视为不可拆分的最小推理单元，仅关注其整体真值（真或假），而完全不涉及命题内部的构成要素，无法区分个体对象、对象的属性以及对象之间的关联,难以捕捉命题背后的本质关联。例如“苏格拉底是人”与“人是会死的”这两个原子命题，在命题逻辑中仅被视为两个独立的符号（如分别记为 p 和 q），无法看出两个命题共享“人”这一核心要素，也无法表达“苏格拉底”这一个体对象与“人”这一属性之间的归属关系，更无法体现两个命题在语义上的内在关联。

2) 缺乏量词机制，无法表达数量与范围的一般性规律

命题逻辑没有引入“所有”“存在”等量词工具，无法对命题中对象的数量范围进行刻画，因此难以表达涉及全体对象、部分对象的一般性规律或存在性断言。这类断言在日常推理和数学推理中极为常见，而命题逻辑只能将其当作孤立的整体命题处理，无法揭示其内部的量化关系。例如“所有人都会死”这一断言，在命题逻辑中只能被当作一个单一的原子命题（记为 p），无法拆分为“对所有个体 x，如果 x 是人，那么 x 会死”的量化形式；同样，“存在一个偶数是质数”也只能作为单个命题处理，无法体现“存在”这一量词所表达的范围属性，进而无法刻画这类一般性或存在性规律。

3) 无法判定依赖命题内部结构的有效推理

有效逻辑论断的核心是,在所有前提为真的情况下，结论必定为真。但命题逻辑的推理仅建立在命题之间的外部真值组合之上，不关注命题内部结构，导致很多直观上有效的推理，在命题逻辑框架内无法被判定为有效，因为其有效性依赖于命题内部的对象、属性或关系，而非单纯的命题间真值关联。例如推理链条，前提 1：所有人都会死；前提 2：苏格拉底是人；结论：苏格拉底会死。这个推理的有效性依赖于“苏格拉底”属于“人”这一内部归属关系，以及“所有人都会死”的量化规律。而在命题逻辑中，该推理只能被表示为“前提 p（所有人都会死）、前提 q（苏格拉底是人），结论 r（苏格拉底会死）”，从命题间的真值组合来看，无法推出“p 且 q 为真时，r 必定为真”，因此无法判定该推理的有效性。

4) 难以刻画个体间的复杂关系

数学推理中经常涉及个体之间的二元、多元关系（如“高于”“等于”“属于”等），而命题逻辑由于不拆分命题内部结构，无法捕捉这类个体间的关系，只能将包含关系的语句当作独立命题处理，进而无法基于关系进行有效推理。例如“张三比李四高”“李四比王五高”这两个语句，在命题逻辑中仅被视为两个独立的原子命题（记为 p 和 q），无法表达“高于”这一二元关系的传递性，因此也无法基于这两个前提，推出“张三比王五高”这一合理结论。

命题逻辑的局限性根源在于其将原子命题视为不可拆分的整体，缺乏对命题内部结构、量词、个体关系的刻画能力，导致其仅能处理简单的命题间真值推理，无法满足复杂语义描述和有效推理的需求。而一阶逻辑通过引入个体变元、谓词、量词等工具，弥补了这些局限，成为能够刻画对象、属性、关系和量化规律的更强大的逻辑系统。

例 4.1：命题逻辑与一阶逻辑比较

有事实：①所有偶数都能被 2 整除；②4 是偶数。

要推出：4 能被 2 整除。

1）用命题逻辑表示，只把整个句子当作原子命题，不拆分内部结构。

设命题 P：所有偶数都能被 2 整除，Q：4 是偶数，R：4 能被 2 整除。

推理形式：$(P\wedge Q)\rightarrow R$

2）用一阶逻辑表示，将问题拆分到谓词、个体、量词

设：$E(x)$：x 是偶数，$D(x)$：x 能被 2 整除，个体常元：4

推理形式：有前提$\forall x(E(x)\rightarrow D(x))$（所有偶数都能被 2 整除）和 $E(4)$（4 是偶数）

形式推理：

$\forall x(E(x)\rightarrow D(x))$ （前提）

$E(4)\rightarrow D(4)$ （全称实例化 x 为 4）

$E(4)$ （前提）

$D(4)$ （假言推理 MP）

命题逻辑把句子当黑盒子，只管根据句子之间的真假关系推理，不管句子内部结构。一阶逻辑打开黑盒子，能表示个体、性质、量词，能做从一般到特殊的实例化推理。

4.1.2 一阶逻辑的语法与语义元素

用符号语言可靠、正确地进行推理，是逻辑的根本任务。要达到此目标需要依次回答 4 个问题。首先是按照一阶语言的语法构成一阶逻辑的语法形式系统。二是通过模型与解释，并利用满足关系来确定句子的语义与真值。三是通过一阶逻辑的推理规则规定形式化推理。
最后通过可靠性与完备性，保证推理系统可靠且正确。

1) 一阶语言的语法构成

一阶语言的语法主要包括字母表、项的形成规则以及合式公式形成规则。字母表是一阶语言的所有基本符号集合，是最底层的语法原子。项是由字母表中的个体符号、函数符号按形成规则构成的表达式。合式公式是由字母表中的谓词符号、项、联结词、量词按形成规则构成的表达式。

定义 4.1:字母表

个体常项： 表示具体确定对象的符号，用 a, b, c 等表示；

个体变项： 表示泛指、任意对象的符号，用 x, y, z 等表示；

谓词符号：表示对象性质或对象之间关系的符号，用 P, Q, R 等表示；

函数符号：表示对象间映射或运算的符号，用 f, g, h 等表示；

量词符号：表示数量范围的符号，包括全称量词 ∀、存在量词 ∃；

联结词符号：表示命题间逻辑关系的符号，包括 ¬, ∧, ∨, →, ↔

辅助符号：用于区分结构、界定范围的符号，包括括号 ( )和逗号，。

定义 4.2: 项（Terms）

一阶语言中用于指称个体域中对象的语法表达式。

形成规则：

个体常项（$a, b, c, \cdots$）是项；

个体变项（$x, y, z, \cdots$）是项；

若 f 是 n 元函数符号，且 $t_1, t_2,\ldots, t_n$ 是项，则 $f(t_1, t_2,\ldots, t_n)$ 是项；

只有按上述规则生成的符号串才是项；

只有按上述规则生成的符号串才是项。

定义 4.3:原子公式与命题函数

原子公式是由谓词符号与项构成的基本合式公式，设 P 是 n 元谓词符号，且 $t_1, t_2,\ldots, t_n$ 是项，则 $P(t_1, t_2,\ldots, t_n)$是原子公式。

命题函数是仅含一个自由个体变元的一元原子公式，即形如 $P(x)$ 的表达式，在对变元 x 赋值或添加量词约束后可成为命题。

2) 合式公式与闭合合式公式

合式公式一定是语法合法的一阶逻辑公式，闭合合式公式（闭公式）中有没有自由变元。

定义 4.4:合式公式（Well-formed formulas, Wff）

合式公式是一阶语言中按规则构成的、具有确定逻辑意义的符号串。

合式公式形成规则：

每个原子公式是合式公式；

若 A 是合式公式，则 $\neg A$ 是合式公式；

若 A,B 是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\to B)$, $(A\leftrightarrow B)$是合式公式；

若 A 是合式公式，x 是个体变项，则$\forall xA$,$\exists xA$ 是合式公式；

只有有限次使用上述规则得到的符号串才是合式公式。

若一个合式公式中不含任何自由出现的个体变元，则称该公式为闭公式（闭合合式公式、语句）。

定义 4.5: 量词的辖域

在公式$\forall xA$ 和$\exists xA$ 中, 称 x 为指导变项（元）, A 为相应量词的辖域。在$\forall x$ 和$\exists x$ 的辖域中, x 的所有出现称为约束出现，A 中不是约束出现的其他变项称为自由出现。

辖域 A 是量词$\forall xA$ 和$\exists xA$ 后面紧接着的那个最短合式子公式，如果个体变元 x 在公式 A 中至少有一处是约束出现，则称 x 为公式 A 中的约束变元。指导变项规定量词管辖的变元符号，公式 A 中和指导变项同名的约束变元 x 才是在论域里真正取值的变元。

例 4.2： 分析公式 $\forall x(F(x,y)\to\exists yG(x,y,z))$的辖域与变元

$\forall x$ 的辖域:$(F(x,y)\to\exists yG(x,y,z))$， 指导变元为 x；

$\exists y$ 的辖域:$G(x,y,z)$，指导变元为 y；

x 的两次出现均为约束出现，是约束变元；

y 的第一次出现为自由出现, 第二次出现为约束出现

z 为自由出现变项。

定义 4.6: 闭式

不含自由出现的个体变项的公式是封闭的合式公式，简称闭式。

闭式中所有变元都是约束变元，约束变元由量词$\forall x$ / $\exists x$ 规定取值方式，不需要给约束变元赋值，只需确定解释（论域 + 谓词含义），就有唯一真值。例如闭式 $\forall x(P(x)\vee\neg P(x))$，$P(x)$：$x$ 是偶数。无需对变元 x 赋值，就有确定真值为恒真。

3) 一阶语言构造合式公式的难点

用一阶语言构造具有确定逻辑意义的合式公式时，主要难点有：

(1) 语法层次混淆，分不清项与公式。项用于指称对象，无真假；公式具有真假。把项当作公式、公式当作项是最典型错误。例如将个体常项 a 或函数项 $f(x)$ 直接当作合式公式。

(2) 量词与变项的约束关系不清，无法明确量词与变项的对应关系，易出现乱用量词、辖域混乱、重复约束等非法结构。例如$\forall xP(x)\wedge\exists x\mathrm{Q}(x)$ 中同一变项被不同量词约束，易造成语义混淆，无约束的变项导致公式意义不明确。

(3) 归纳构造意识不足。合式公式必须严格按照形成规则递归生成，不能随意拼接符号串。例如直接将符号无序组合成 $P\forall\wedge x$ 这类不符合语法规则的符号串。

4.1.3 一阶逻辑的语义

一阶语言的语法给出了合式公式符号串的构造与变形规则，其语义解释符号串的意义、指称、真值条件，建立与实际问题的联系。

一阶逻辑的语义由论域、解释、变量赋值、满足与真这四个相互关联的核心维度构成。论域为符号提供了个体对象的取值范围，解释将一阶语言中的常元、函数符号与谓词符号对应到论域中的个体、函数和关系，变量赋值为自由变元指派论域中的对象，在此基础上通过递归方式定义满足与真，从而确定公式在结构中的真值条件，最终实现形式符号与意义、指称和真值的统一。

1) 论域

定义 4.7: 论域

论域是一阶逻辑模型 / 解释中预先指定的非空个体对象集合，记为 D（或 $|\mathscr{M}|$）。它是：

所有个体变元、常元、项的指称取值范围；

量词 $\forall$（全称）与 $\exists$（存在）的量化作用范围；

谓词、函数符号解释的基础论域。

论域也称为个体域、简称为域，是所讨论问题中所有个体构成的集合，其作用是规定量词$\forall x,\exists x$ 到底在说谁。全域（全总个体域）是把世间一切个体都包含进来的最大个体域。同一公式在不同论域下真值可不同。

2) 解释与赋值

解释就是把一阶语言句子中没有意义的字母，对应到现实里具体的事物、性质、关系。赋值是在给定的解释下为公式中的自由变量指定值。

3) 满足与真

设：L 为一阶语言, $M=\langle D,I\rangle$ 为 L 的模型（D 为论域，I 为解释），v 为变量的赋值，φ 为 L 的任意公式。

定义 4.8: 一阶逻辑公式的语义分类

满足：赋值 v 在模型 M 中满足公式 φ，记作 $M,v\vDash\varphi$，当且仅当 φ 在 M 与 v 下为真。

如果对每一个赋值 v，都有 $M,v\vDash\varphi$ 就称 φ 在模型 M 中为真，记作：$M\vDash\varphi$。

公式 φ 是可满足的：是指存在某个模型 M 和某一组赋值 v，使 φ 为真。

公式 φ 在模型 M 中为真：是指在模型 M 里，所有赋值都满足 φ，换模型可能为假。

公式 φ 是永真式（普遍有效式）：是指在所有模型、所有赋值下都为真，不可能假。

按取值情况，一阶逻辑公式分为普遍有效式（永真式）、可满足式和不可满足式（矛盾式）。普遍有效式取值永远真、可满足式取值可真可假、不可满足式取值永远假。

例 4.3：交通场景示例

①设一阶语言元素：个体变元 x，一元谓词 $P(x)$，个体常元 c。

②模型 $M=\langle D,I\rangle$，论域 $D=\{$汽车, 自行车, 路灯$\}$。

③解释 I：谓词解释 $P(x)$：x 是交通工具，常元解释：$I(\mathrm{c})$=汽车

④变量 x 赋值：赋值 1：$v_1(x)$=汽车，赋值 2：$v_2(x)$=路灯

⑤公式满足（$M,v\vDash\varphi$）：对公式 $P(x)$

$M,v_1\vDash P(x)$ 满足，因汽车是交通工具，在模型 M 和 v_1 赋值下公式 $P(x)$满足。

$M,v_2\vDash P(x)$ 不满足，因路灯不是交通工具，在模型 M 和 v_2 赋值下公式 $P(x)$解释为错，公式 $P(x)$不满足。

⑥真（$M\vDash\varphi$），真只对句子（无自由变元）定义。

句子 $P(c)$的含义：根据 $I(c)$，汽车是交通工具，对任何 x 赋值都真。$M\vDash P(c)$在模型 M 中为真。

句子$\forall xP(x)$的含义：所有东西都是交通工具。因路灯不是，所以句子$\forall xP(x)$并非所有赋值都满足，在模型中为假。

⑦谓词的可满足与永真

$P(x)$：存在模型 M 和赋值 v_1 让它为真→ 可满足

$P(c)$：只在 M 这个模型为真→ 不是永真

$\forall x(P(x)\vee\neg P(x))$：所有模型都真→ 永真式

4.1.4 谓词的分类与基本特征

定义 4.9: 谓词

谓词是一阶语言中的非逻辑符号，分为谓词常元与谓词变元。每个谓词符号 P 有一个固定的元数，表示它可与 n 个项结合。

由 n 元谓词 P 与 $t_1, t_2,\dots, t_n$ 项构成的表达式 $P(t_1, t_2,\dots, t_n)$是原子公式，是一阶语言中最基本的合式公式。

定义 4.10:谓词常元与谓词变元

谓词常元是具有固定元数的非逻辑常项符号，在给定模型与解释下，被唯一指派为论域上一个确定的 n 元关系，用于表示固定的性质或关系。

谓词变元是具有固定元数的谓词位置变元符号，它不被解释函数固定指派，而可在论域上同元数的所有 n 元关系构成的集合中取值，用于表示“任意性质 / 任意关系”。

按照构成谓词的元数可分为：

0 元谓词：是不含个体变项 / 常项的谓词，其真值唯一，等价于命题逻辑的命题常元。

1 元谓词：刻画单个个体的性质。

n 元谓词：刻画 n 个个体之间的关系 。

从语义的角度，一元谓词是用来刻画个体是什么、怎么样，称为属性谓词。多元谓词描述个体之间有什么关系，称为关系谓词。

例 4.4：谓词常元与谓词变元

在所有自然数中论域中，

设：$E(x)$：x 是偶数，$<(x,y)$：x 小于 y，二者是有固定含义的谓词常元。

$X(x)$：x 具有某个性质，$Y(x,y)$：x 与 y 具有某个关系，二者是含义未定的谓词变元。

把谓词变元替换成一个具体的谓词常元叫谓词代入。例如 $X(x)$可以代入：$E(x)$，“x 是素数”“x 大于 10” 等谓词常元。$Y(x,y)$可以代入：$<(x,y)$，“x 整除 y” 等谓词常元。把谓词代入后，原来的谓词变元就相当于被合法替换了，代入后的公式合法、逻辑正确、变量不乱。可使研究工作从某个具体句子扩展到所有句子共同的逻辑形式。谓词变元与 C 程序设计语言里的函数指针类似，都不绑定具体实现、只规定接口的占位符。

4.2 一阶逻辑演算

一阶语言语法给出了符号、项、原子公式、合式公式、约束变元、量词辖域等公式结构。一阶逻辑演算建立在一阶语言的语法之上，通过可靠性与完备性定理提供形式证明，并遵循一阶语言语义的真假标准 。

4.2.1 逻辑等价规则

两个一阶语言写成的公式，在所有解释、所有论域下都同真同假，则称这两个一阶公式 A,B 逻辑等价，就得到等价式 $A\Leftrightarrow B$）。当把等价式作为公式变形、等值演算的合法依据时，它就成为等价规则。等价规则是一阶逻辑演算的依据与基础，演算是等价规则的具体应用过程，等值演算就是等价规则的有序使用。

一阶逻辑等价规则有三个重要来源，一是命题逻辑等价式的代换实例，二是构建量词否定等值式，三是通过量词辖域、分配与易字等值式获得。

1）命题逻辑等价式与一阶逻辑等价规则

命题逻辑的等价规律是一阶逻辑等价规则的重要来源，一阶逻辑在联结词层面完全继承命题逻辑的等价性质。用任意谓词公式处处代换命题逻辑等价式中的命题变项，得到的一阶公式对仍然是逻辑等价的。

定义 4.11: 命题逻辑等价式的代换实例

设 A_0 是含命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 的命题公式, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是 n 个谓词公式, 用 A_i 处处代替 A_0 中的 $p_i(1\le i\le n)$, 所得公式 A 称为 A_0 的代换实例。

例如 $F(x)\to G(x)$, $\forall xF(x)\to\exists yG(y)$ 等都是 $p\to q$ 的代换实例。

定理 4.2：重言式的代换实例都是永真式，矛盾式的代换实例都是矛盾式。

例 4.5：解释如下公式

(1) $\forall x(F(x)\to G(x))$

I_1: $D_1=\mathbb{R}$, $\bar{F}(x)$:x 是整数, $\bar{G}(x)$:x 是有理数，代入公式(1)得到真命题。

I_2: $D_2=\mathbb{R}$, $\bar{F}(x)$:x 是整数, $\bar{G}(x)$:x 自然数，代入公式(1)得到假命题。

结论：公式(1)在 I_1 解释下为真，是可满足式；在 I_2 解释下为假，真非永真式。

(2) $\neg(\forall xF(x,y))\vee(\forall xF(x,y))$

公式(2)是$\neg p\vee p$ 的代换实例，也是重言式（永真式）。

(3) $\neg(\forall xF(x)\to\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$

公式(3)是$\neg(p\to q)\wedge q$ 的代换实例, 与$\neg(p\to q)\wedge q$ 一样, (3)也是矛盾式。

(4) $\forall xF(x,y)$

I_1: $D_1=\mathbb{N}$, $\bar{F}(x,y)$:$x\ge$ y, 赋值$\sigma(y)=0$，代入公式 (4) 得到真命题。

I_2: $D_2=\mathbb{N}$, $\bar{F}(x,y)$:$x\ge$ y, 赋值 $\sigma(y)=1$，代入公式 (4) 得到假命题。

结论：公式(4) 是非永真式的可满足式。

定义 4.12: 逻辑等值

若 $A\leftrightarrow B$ 是逻辑有效式（永真式）, 则称 A 与 B 等值, 记作 $A\Leftrightarrow B$, 并称 $\mathrm{A}\Leftrightarrow B$ 为等值式。

3.2.1 节介绍的命题基本等值式及其代换实例都是一阶逻辑的等值式。例如, $\forall xF(x)\to\exists yG(y)\Leftrightarrow\neg\forall xF(x)\vee\exists yG(y)$ 和 $\neg(\forall xF(x)\vee\exists yG(y))\Leftrightarrow\neg\forall xF(x)\wedge\neg\exists yG(y)$ 是蕴含等值式（蕴涵律）和德.摩根律的代换结果，这些命题逻辑里的等值结构在一阶逻辑中，形式不变、规律不变、作用不变。

2）量词否定等价式

量词消除等价式是一阶逻辑特有的、关于量词的等值式，与命题逻辑代换实例共同构成完整的一阶逻辑等价规则。量词消除等价式包括量词否定等值式、量词辖域收缩与扩张、量词分配等值式等。

定义 4.13:量词否定等价式（量词否定律）

在不改变命题逻辑含义的前提下，可以通过将全称量词$\forall$与存在量词$\exists$互换改变否定词的辖域。若 $A(x)$ 为一个 x 在其中自由出现的公式，则有$\neg\forall xA(x)\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)$ 和 $\neg\exists xA(x)\Leftrightarrow\forall x\neg A(x)$ 等价式成立。

量词否定等价式强调否定词与量词交换位置时，量词必须翻转，否定在移动。从量词类型发生转换的视角看，上述两个公式也叫量词转换等价式。

3）消去量词等值式

设个体域 D 为有限集合，$D=\{a_1, a_1, \ldots, a_n\}$，$A(x)$ 是含自由变元 x 的谓词公式，则以下等值式成立：

$\forall xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\cdots\wedge A(a_n)$

$\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \cdots \vee A(a_n)$

利用这组等值式可以消去量词，将一阶谓词公式转化为命题逻辑公式。

4）量词分配等值式

设 $A(x)$、$B(x)$ 是含自由变元 x 的谓词公式，则以下两组逻辑等价式成立：

全称量词对合取的分配律：$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$

存在量词对析取的分配律：$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$

注意：全称量词$\forall$对析取$\vee$、存在量词$\exists$对合取$\wedge$都不能跨括号分配，因为前者会从 “每个任选” 变成 “全部统一”，后者会从 “各有一个” 变成 “同一个”，都会改变命题强弱。

5）量词辖域收缩与扩张等值式

若一个等值式，是把量词的辖域由较大范围缩小为较小范围，则称该等值式为量词辖域收缩等值式。若 B 里没有自由 x，下面的量词辖域收缩等值关系不变：

$\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \vee B$　　$\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee B$

$\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge B$　　$\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge B$

$\forall x(A(x) \to B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \to B$　　$\exists x(A(x) \to B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \to B$

$\forall x(B \to A(x)) \Leftrightarrow B \to \forall xA(x)$　　$\exists x(B \to A(x)) \Leftrightarrow B \to \exists xA(x)$

若一个等值式，是把量词的辖域由较小范围扩大为较大范围，则称该等值式为量词辖域扩张等值式。若 B 里没有自由 x，下面的量词辖域扩张等值关系不变：

$\forall xA(x) \wedge B \Leftrightarrow \forall x(A(x) \wedge B)$

$\forall xA(x) \vee B \Leftrightarrow \forall x(A(x) \vee B)$

$\exists xA(x) \wedge B \Leftrightarrow \exists x(A(x) \wedge B)$

$\exists xA(x) \vee B \Leftrightarrow \exists x(A(x) \vee B)$

4.2.2 置换与重命名规则

1）等值置换规则

置换规则： 设$\Phi(A)$是含公式 A 的公式, $\Phi(B)$是用公式 B 取代$\Phi(A)$中的所有 A 得到的公式, 若 $A \Leftrightarrow B$，则$\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$。

在保持公式逻辑等值的前提下，置换规则将公式中任意子公式替换为与其等值的公式，从而对公式进行等值变形、化简与整理，为进一步的逻辑推理、证明以及将公式化为范式（如前束范式）提供合法且等价的形式变换手段。在命题逻辑里，等值置换规则中 A、B、 $\Phi(A)$、 $\Phi(B)$ 都是命题公式，在一阶逻辑里 A、B、 $\Phi(A)$、 $\Phi(B)$可以是一阶公式（即可以含 $\forall$、$\exists$、谓词、个体变元）。

2）约束变元重命名规则

设 $\forall xA(x)$或 $\exists xA(x)$是公式，若变元 y 不在 $A(x)$中自由出现，且将公式中所有约束出现的 x 统一替换为 y 得到 $\forall yA(y)$或 $\exists yA(y)$，则$\forall xA(x) \Leftrightarrow \forall yA(y)$, $\exists xA(x) \Leftrightarrow \exists yA(y)$。

换名规则将公式 A 中某量词的指导变元及其在辖域内的所有约束出现改成该量词辖域内未曾出现的某个个体变项, 其余部分不变, 则二者逻辑等值。通过对约束变元统一更换符号，避免同一变元符号在公式中既约束出现又自由出现，或被不同量词重复约束，从而消除变元命名冲突，保证后续等值演算、量词分配、代入与置换等推理过程合法、无歧义。

例 4.6： 消除那些既出现在约束条件中，又作为自由变量的个体变量。

(1) $\forall xF(x,y,z) \to \exists yG(x,y,z)$

$\Leftrightarrow \forall uF(u,y,z) \to \exists yG(x,y,z)$

$\Leftrightarrow \forall uF(u,y,z) \to \exists vG(x,v,z)$ （重命名规则）

避免变量混淆，提高表达式的可读性和一致性。

(2) $\forall x(F(x,y) \to \exists yG(x,y,z))$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x,y) \to \exists tG(x,t,z))$ （重命名规则）

例 4.7： 设个体域为 $D=\{a,b,c\}$，消去下列公式中的量词。

(1) $\forall x(F(x)\to G(x))$

$\Leftrightarrow (F(a)\to G(a))\wedge(F(b)\to G(b))\wedge(F(c)\to G(c))$

(2) $\forall x(F(x)\vee\exists yG(y))$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\vee\exists yG(y)$ （ 量词辖域缩减）

$\Leftrightarrow(F(a)\wedge F(b)\wedge F(c))\vee(G(a)\vee G(b)\vee G(c))$

(3) $\exists x\forall yF(x,y)$

$\Leftrightarrow \exists x(F(x,a)\wedge F(x,b)\wedge F(x,c))$

$\Leftrightarrow (F(a,a)\wedge F(a,b)\wedge F(a,c))\vee(F(b,a)\wedge F(b,b)\wedge F(b,c))\vee(F(c,a)\wedge F(c,b)\wedge F(c,c))$

例 4.8： 证明等式 $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x)) \Leftrightarrow \forall x(M(x)\to \neg F(x))$

证:

等式左边 $\Leftrightarrow \forall x \neg(M(x)\wedge F(x))$ （量词的德摩根定律）

$\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x)\vee\neg F(x))$

$\Leftrightarrow \forall x(M(x)\to \neg F(x))$

4.2.3 范式转换规则

范式转换规则的目标是在保持公式逻辑等值的前提下，利用等值置换、约束变元重命名、量词辖域扩张与收缩等规则，将任意一阶公式进行等值变形，把所有量词集中移到公式最前端，使公式成为前束范式，为后续的判定、推理、证明、机械化推演提供统一且便于处理的公式结构。

定义 4.14: 前束范式（PNF）

设 A 为一个一阶逻辑公式, 若 A 具有如下形式:

$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$，则称 A 为前束范式, 其中 Q_i 为$\forall$或$\exists$, x_i 是个体变元，$1\le i\le k$, B 为不含量词的公式。

例如 $\forall x\exists y(F(x)\to(G(y)\wedge H(x,y)))$ ，$\forall x\neg(F(x)\wedge G(x))$是前束范式；

$\forall x(F(x)\to\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$， $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$不是前束范式。

前束范式的所有量词都出现在公式的最前端，每个量词的辖域都延伸到整个公式的末尾，B 为不含量词的一阶公式，称为母式（matrix）。任何一阶公式，都可以通过等值演算化为与之等值的前束范式。

前束范式(PNF) 、否定范式(NNF) 、析取范式(DNF) 、 合取范式(CNF) 、Skolem 范式 是一阶逻辑的 5 大范式。它们从不同侧面揭示了一阶逻辑具有极强的规整性与可标准化能力，任何公式都能被转化为结构清晰、层次分明、便于推理与计算的规范形式，从而实现逻辑演算的机械化与系统化。各种范式的详情参见本章 AI 提示词。

习题

知识扩展提示词

NNF、DNF、CNF、PNF、Skolem 范式的特点及转换规则？

第 4 章主要数学符号列表

序号	符号	含义	示例
1	∀	全称量词	$\forall x P(x)$,对所有的 x,使得 $P(x)$成立
2	∃	存在量词	$\exists\, x\, P(x)$,存在 x,使得 $P(x)$成立
3	⊨	满足符	$M,v \vDash \varphi$, 赋值 v 在模型 M 中满足公式 φ
4	⇔	逻辑等值	A⇔B, 两个一阶公式 A,B 逻辑等价